CEVAP ANAHTARI

Adı ve Soyadı : **21.01.2020**

Numara:

MAT 103 LİNEER CEBİR I FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: Bir V iç çarpım uzayında $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ vektörleri ortogonal ise lineer bağımsızdır. İspatlayınız.

SORU 2: IR^4 de $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ cümlesi bir alt vektör uzayı mıdır, araştırınız.

SORU 3: V bir reel iç çarpım uzayı olsun. $\forall x, y \in V$ ortogonal vektör çifti için

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

dir, ispat ediniz.

SORU 4:

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \to A(x,y,z) = (x, x+y, x+z)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün lineer olup olmadığını araştırınız.

SORU 5: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ de

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun:

a) Pozitif tanımlı olduğunu gösteriniz.
b) $x = (3,-1), y = (4,2) \in \mathbb{R}^2$ için $\langle x, y \rangle = ?$

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

CEVAPLAR

1- n- tane ortogonal vektör $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0 \quad \text{ise} \quad 1 \leq j \leq n \text{ için} \quad \ldots (1)$$

- $$< \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i , \alpha_1 > = < c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots + c_n \alpha_n , \alpha_1 >$$

$$= c_1 \underbrace{<\alpha_1, \alpha_1>}_{=1} + c_2 \underbrace{<\alpha_2, \alpha_1>}_{=0} + \cdots + c_n \underbrace{<\alpha_n, \alpha_1>}_{=0}$$

$< c_i, c_j > = \delta_{ij}$

$$= c_1$$

- $$< \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i , \alpha_2 > = < c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots + c_n \alpha_n , \alpha_2 >$$

$$= c_1 \underbrace{<\alpha_1, \alpha_2>}_{=0} + c_2 \underbrace{<\alpha_2, \alpha_2>}_{=1} + \cdots + c_n \underbrace{<\alpha_n, \alpha_2>}_{=0}$$

$$= c_2$$

$\vdots$

- $< \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i . \alpha_n > = c_n$ bulunur. O halde genellersek

$$< \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i , \alpha_j > = c_j \text{ yazılır}$$

$\alpha_j \neq 0$ olduğundan (1) eşitliğinden

$$< \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i , \alpha_j > = < 0 , \alpha_j >$$

$\Rightarrow \quad c_j = 0 \; ; \; 1 \leq j \leq n$ bulunur. Bunun anlamı

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vektörleri lineer bağımsızdır.

2- $W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \} \subset \mathbb{R}^4$

- $W \subset \mathbb{R}^4$ olduğu açıktır.
- $\exists\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ için $(0,0,0,0) \in W$ olup

$W \neq \emptyset$ dır.

- $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in W$ için

$X \in W \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$Y \in W \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ yazılır.

$X + Y = (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4)$

$= (\underbrace{x_1 + y_1}_{=z_1}, \underbrace{x_2 + y_2}_{=z_2}, \underbrace{x_3 + y_3}_{=z_3}, \underbrace{x_4 + y_4}_{=z_4})$ dır. $X + Y \in W$

olması için $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ olmalıdır.

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$

$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

$X \in W$, $Y \in W$ $\Rightarrow$ $= 0 + 0 = 0$ olup $X + Y \in W$ bulunur.

- $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ için

$X \in W \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ yazılır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda X = \lambda (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ dır. $\lambda X \in W$

olması için $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0$ olmalıdır.

$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = \lambda (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

$X \in W$ $\Rightarrow$ $= \lambda . 0 = 0$ olup $\lambda X \in W$ d[ır].

Sonuç olarak W, $\mathbb{R}^4$ uzayın bir alt vektör uzayıdır.

3- V bir reel iç çarpım uzayı olduğu için

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$ yazılır.

Hipoteze göre $\forall x,y \in V$ ortogonal çifti olduğundan

$\langle x,y\rangle = 0$ dır. Buradan

$$\|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + 2.0 + \langle y,y$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2$$ elde edilir.

4- $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to A(x,y,z) = (x, x+y, x+z)$

• $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$\alpha+\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)$$

olmak üzere

$$A(\alpha+\beta) = A(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)$$

$$= (\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2, \alpha_1+\beta_1+\alpha_3+\beta_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3) + (\beta_1, \beta_1+\beta_2, \beta_1+\beta_3)$$

$$= A(\alpha) + A(\beta)$$ dır.

• $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$\lambda \alpha = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
A(\lambda\alpha) &= A(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) \\
&= (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_3) \\
&= (\lambda\alpha_1, \lambda(\alpha_1+\alpha_2), \lambda(\alpha_1+\alpha_3)) \\
&= \lambda(\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3) \\
&= \lambda A(\alpha)
\end{aligned}
$$

dır. Sonuç olarak A bir lineer dönüşümdür.

5- $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2$

a) $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$
\begin{aligned}
\langle x, x \rangle &= \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle \\
&= x_1 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 3 x_2 x_2 \\
&= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_2^2 \\
&= \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} \geq 0
\end{aligned}
$$

ve $x = (0,0)$ için $\langle x, x \rangle = 0$ olup $\langle x, x \rangle \geq 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\langle\, ,\, \rangle$ dönüşümü pozitif tanımlıdır.

b) $\langle (3,-1), (4,2) \rangle = 3.4 - 3.2 - (-1).4 + 3(-1).2$

$= 12 - 6 + 4 - 6 = 4 \in \mathbb{R}$ bulunur.